

УДК 519.6:532:533

**РАСЧЕТ ВОЛН В ЖИДКОСТИ И ГАЗЕ МЕТОДОМ CIP-CUP С ПРИМЕНЕНИЕМ
ДИНАМИЧЕСКИ-АДАПТИВНЫХ SOROBAN-СЕТОК¹⁾****А.А. АГАНИН, Т.С. ГУСЕВА***Институт механики и машиностроения КазНЦ РАН, г. Казань**E-mail aganin@kfti.knc.ru; ts.guseva@mail.ru***COMPUTATION OF WAVES IN LIQUID AND GAS BY THE CIP-CUP METHOD BY USE THE
DYNAMICALLY ADAPTIVE SOROBAN GRIDS****A.A. AGANIN, T.S. GUSEVA***Institute of Mechanics and Engineering KazSC RAS, Kazan***Аннотация**

Разработаны и апробированы алгоритмы и программы расчета волн в сжимаемых средах при наличии контактных границ типа газ-жидкость. В их основу положен модифицированный метод CIP-CUP на динамически-адаптивных Soroban-сетках. Применение метода CIP-CUP в сочетании с Soroban-сетками позволяет обеспечить достаточное разрешение особенностей волновых задач в окрестностях контактных разрывов, ударных волн и в других областях с большими градиентами решения при значительно меньшем количестве узлов, чем при использовании метода CIP-CUP на стационарных декартовых сетках. Кроме того, Soroban-сетки являются более эффективными при описании движения контактных границ.

Ключевые слова: Волны, контактная граница, метод CIP-CUP, адаптивные Soroban-сетки

Summary

Numerical algorithms and computer codes of calculating waves in compressible fluids with the contact interfaces of the gas-liquid type have been developed and tested. They are based on the modified CIP-CUP method on the dynamically adaptive Soroban grids. The use of the CIP-CUP method along with the Soroban grids allows one to ensure necessary resolution of features of the wave problems in vicinities of the contact discontinuities, the shock waves and in the other areas with large gradients of the solution with utilizing significantly less amount of the vortices than while applying the CIP-CUP method on the stationary Cartesian grids. Moreover, the Soroban grids are more efficient in describing motion of the contact boundaries.

Key words: Waves, contact interface, CIP-CUP method, adaptive Soroban grids

Введение

Для расчета задач с ударными волнами и интенсивно деформирующимися контактными границами между сжимаемыми средами эффективным является подход, в котором все эти особенности рассчитываются сквозным образом. При таком подходе и ударная волна, и контактная граница газ – сжимаемая жидкость описываются как узкие переходные зоны с сильным изменением параметров среды. Примерами задач, в которых сквозной счет контактных разрывов и ударных волн может быть весьма эффективным, являются задачи о схлопывании кавитационных пузырьков вблизи стенки. Ранее авторами с целью применения к таким задачам была реализована методика расчета, основанная на сквозном вычислении ударных волн и контактных разрывов методом CIP-CUP (Constrained Interpolation Profile – Combined Unified

¹⁾Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 12-01-00341-а)

Procedure)[1] с использованием стационарных разнесенных сеток [2, 3]. Однако оказалось, что для рассматриваемых задач схлопывания пузырьков у стенки в силу больших формоизменений и перемещений, а также взаимодействия контактных разрывов и ударных волн более предпочтительны адаптивные сетки, свободные от ограничений, связанных с их деформацией и движением. В работе [4] был предложен способ дискретизации расчетной области с помощью Soroban-сетки и соответствующая модификация метода CIP-CUP. Soroban-сетка является, по сути, неструктурированной сеткой, узлы которой не связаны между собой никакими элементами типа ячеек. Это, с одной стороны, затрудняет использование подхода с разнесением сеток, с другой стороны, освобождает от ограничений, обусловленных деформациями сетки при ее адаптации к решению. Приведены тестовые расчеты с применением Soroban-сеток, и сравнение с численными решениями, полученными на равномерных стационарных сетках.

1. Математическая модель и методика расчета

Динамика контактирующих газа и жидкости без учета эффектов вязкости и теплопроводности описывается системой

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{f} = \mathbf{G}, \quad (1)$$

где $\mathbf{f} = (\rho, \mathbf{u}, p, \varphi)$, $\mathbf{G} = (-\rho \nabla \cdot \mathbf{u}, -\rho^{-1} \nabla p, -\rho C_S^2 \nabla \cdot \mathbf{u}, 0)$, ρ — плотность, \mathbf{u} — скорость, p — давление, скорость звука $C_S = \varphi C_{S1} + (1 - \varphi) C_{S2}$, $C_{Si} = \sqrt{\Gamma_i(p + B_i)/\rho}$, $i = 1, 2$, Γ_1, B_1 — константы уравнения состояния Тэта для жидкости и $\Gamma_2 = \gamma, B_2 = 0$ для газа (γ — показатель адиабаты), φ — функция-идентификатор среды. Введение функции-идентификатора φ обусловлено сквозным расчетом контактных разрывов. Предполагается, что $0 \leq \varphi \leq 1$: в области жидкости $\varphi = 1$, в области газа $\varphi = 0$, а в малой окрестности их контактной границы φ непрерывна и монотонно меняется от 0 до 1.

Структура двумерной Soroban-сетки (от японского “soroban” — счеты) показана на рис. 1. Она представляет собой набор узлов, расположенных на направляющих линиях, параллельных, например, оси Ox . Сетка перестраивается на каждом временном шаге, адаптируясь к особенностям решения. Количество и положение направляющих (могут перемещаться вдоль оси Oy) и узлов на них может изменяться. Для адаптации сетки к решению используется монитор-функция M , определяемая пространственным распределением какого-либо параметра решения f . Для задач с контактной границей типа газ — жидкость в качестве такого параметра может выступать плотность. В одномерном случае функция M имеет вид

$$M(x, t) = \min \left(\sqrt{1 + \alpha \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2} + \beta \left| \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} \right|, M_{\max} \right), \quad x \in [x_S, x_E].$$

Здесь x_S, x_E — координаты начала и конца отрезка, на котором строится сетка. Положительные константы α, β регулируют рост функции M в областях с резким изменением параметра f или его производной $\partial f / \partial x$, соответственно. При построении сетки ее узлы сгущаются в окрестностях максимумов функции M . M_{\max} — константа, определяющая соотношение максимального и минимального шагов сетки.

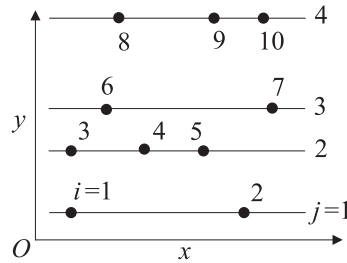


Рис. 1: Двумерная Soroban-сетка, j — номер линии, i — номер узла.

Координаты новой сетки определяются из условия, что приращение интеграла от M на каждом отрезке будущей сетки из N^{n+1} узлов равно одному и тому же значению. Тогда координата i -го узла новой

сетки

$$x_i^{n+1} = I^{-1} \left(i \frac{I(x_E)}{N^{n+1} - 1} \right).$$

Здесь

$$I(x, t) = \int_{x_S}^x M(x, t) dx,$$

поскольку I — монотонно возрастающая функция, значения обратной функции I^{-1} могут быть получены линейной интерполяцией с использованием значений I в узлах старой сетки. Количество узлов сетки определяется как округленное до целого числа отношение интеграла монитор-функции по всей длине линии к заданному максимальному шагу сетки

$$N^{n+1} = \text{int} \left(\frac{I(x_E)}{\Delta x_{\max}} \right) + 1.$$

Если функция M принимает везде минимальное значение (равное 1), то строится равномерная сетка с максимальным шагом Δx_{\max} , иначе минимальный шаг сетки вычисляется как $\Delta x_{\min} = \Delta x_{\max} / M_{\max}$.

В двумерном случае монитор-функция определяется свойствами поверхности, представляющей собой зависимость выбранного параметра от двух пространственных координат:

$$M(x, y, t) = \sqrt{1 + \alpha \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right) + \beta \left(\left| \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} \right| + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} \right| \right)}, x \in [x_S, x_E], y \in [y_S, y_E].$$

Сначала определяются новые позиции линий y_j^{n+1} с использованием одномерной функции

$$M^y(y, t) = q \max_{x_S \leq x \leq x_E} M(x, y, t) + (1 - q) \frac{1}{x_E - x_S} \int_{x_S}^{x_E} M(x, y, t) dx, 0 \leq q \leq 1.$$

Затем для каждой новой линии y_j^{n+1} определяются новые позиции узлов.

Принцип расчета как в рамках старой методики на стационарных сетках, так и в рамках модифицированной методики на адаптивной Soroban-сетке одинаков. Численное решение системы (1) разбивается на конвективную и неконвективную стадии. Для расчета группы уравнений переноса на конвективной стадии применяется метод RCIP (Rational-Cubic Interpolation Propagation) [5], являющийся одним из вариантов полулагранжева метода CIP. На неконвективной стадии используется Unified Procedure [1] — неявная схема с применением уравнения для давления, которое решается итерационным методом. При решении задач с ударными волнами описанная схема используется в сочетании с искусственной вязкостью [4].

Построение конечно-разностных аппроксимаций производных на адаптивной неструктурированной Soroban-сетке имеет некоторые особенности, подробно описанные в [4, 6].

Разработанные алгоритмы и программы были протестированы на ряде задач. Ниже приводятся две из них. Это задачи о распаде плоского и цилиндрического разрывов на границе газ — жидкость с высоким давлением. Первая из этих задач решается в одномерной постановке, а вторая — в двумерной.

2. Распад плоского разрыва на границе газ — жидкость

В начальный момент времени область $x > x_0$ занята жидкостью ($\varphi = 1$) с параметрами $\Gamma = 7.15$, $B = 3072$ бар, $p = 10^4 p_0$, $\rho = 1.224 \rho_0$, а область $x < x_0$ — газом ($\varphi = 0$) с параметрами $\gamma = 1.4$, $p = p_0$, $\rho = 10^{-3} \rho_0$. Обе среды неподвижны, $p_0 = 1$ бар, $\rho_0 = 10^3$ кг/м³, $x_0 = 750$ м.

На рис. 2 представлено точное решение этой задачи и результаты расчетов, полученные в области $0 \leq x \leq 3000$ м с применением метода CIP-CUP как на стационарной равномерной разнесенной сетке из 100 узлов с шагом $\Delta x = 30$ м, так и на одномерной Soroban-сетке с $\Delta x_{\min} = \Delta x/3$ и $\Delta x_{\max} = 4\Delta x$,

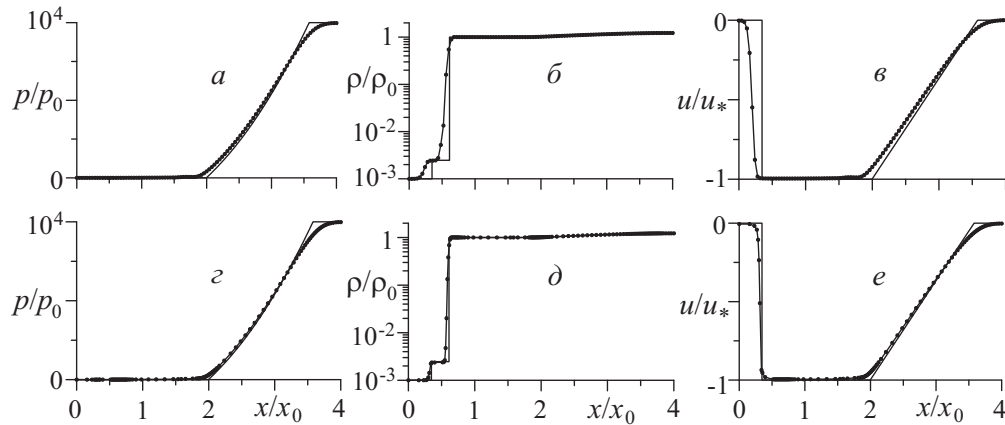


Рис. 2: Пространственные распределения давления, плотности и скорости при $t = 0.7$ с в задаче о распаде плоского разрыва на границе между газом и жидкостью, полученные методом CIP-CUP на равномерной разнесенной сетке (а-в) и на адаптивной Soroban-сетке (г-е), $u_* = 416$ м/с. Точки на кривых численного решения соответствуют узлам сеток. Точное решение — кривые без точек.

$\alpha = 1.6, \beta = 0.3$. Начальное распределение параметров при расчете на Soroban-сетке задавалось на равномерной сетке из 200 узлов. Шаг по времени в обоих случаях составлял около $2 \cdot 10^{-3}$ с. Коэффициент искусственной вязкости в газе 0.4.

В результате распада разрыва возникают ударная волна, уходящая в область газа, и волна разрежения, распространяющаяся в область жидкости. Контактный разрыв с большим скачком плотности следует за ударной волной. Численное решение, полученное на равномерной сетке, вполне удовлетворительно описывает волну разрежения. Вместе с тем, довольно велика погрешность в описании ударной волны и контактного разрыва (в частности, их положения). При использовании Soroban-сетки согласование с точным решением заметно улучшается: размазывание ударной волны и контактного разрыва уменьшается, их положение становится значительно более близким к точному. Количество узлов Soroban-сетки на протяжении всего расчета остается меньше 120 (рис. 3), в то время как достижения подобного разрешения указанных особенностей решения потребовалась бы равномерная сетка из 300 узлов.

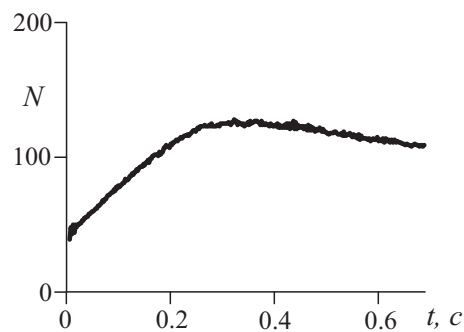


Рис. 3: Изменение количества узлов Soroban-сетки при расчете распада плоского разрыва на границе газ — жидкость.

3. Распад цилиндрического разрыва на границе газ — жидкость (сжатие цилиндрической газовой полости в жидкости)

Параметры газа и жидкости те же, что и в предыдущем случае плоского разрыва. Но теперь газ находится внутри цилиндрической области с радиусом $r < 300$ м, окруженной жидкостью, давление которой в

10^4 раз выше давления газа. Расчет проводился в двумерной постановке. Расчетная область $0 \leq x \leq 3000$ м, $0 \leq y \leq 3000$ м. Центр области, занятой газом, располагался в точке $x_0 = 1500$ м, $y_0 = 1500$ м. В результате распада разрыва на контактной границе возникают цилиндрическая радиально сходящаяся в газе ударная волна и цилиндрическая радиально расходящаяся в жидкости волна разрежения. При этом амплитуда ударной волны со временем возрастает, а амплитуда волны разрежения, наоборот, убывает, тогда как при распаде аналогичного плоского разрыва они остаются постоянными.

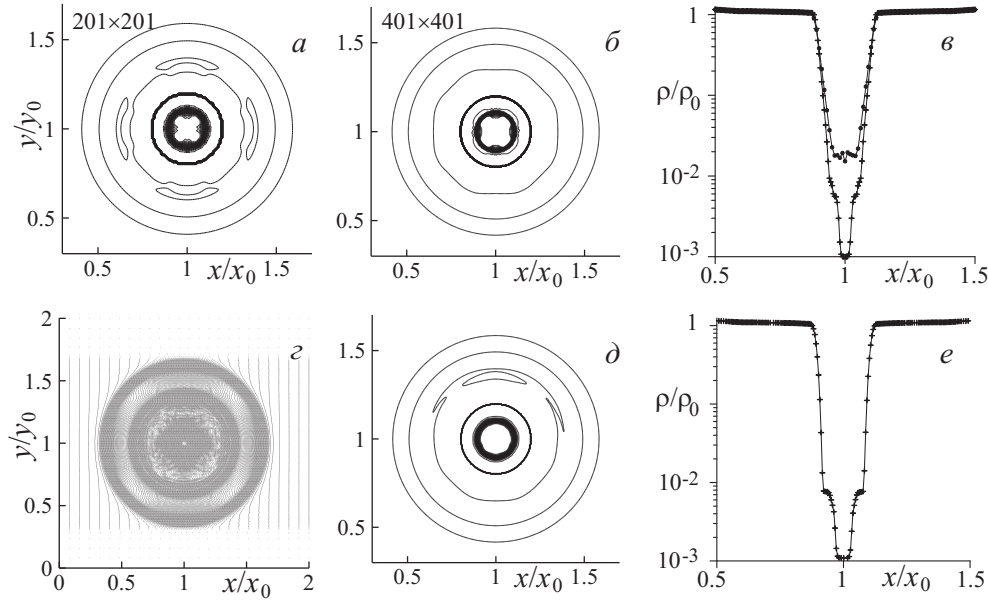


Рис. 4: Задача о сжатии цилиндрической газовой полости в жидкости. Результаты расчетов методом SIP-CUP на равномерной разнесенной сетке (верхний ряд) и на Soroban-сетке (нижний ряд) в момент $t = 0.23$ с: изолинии плотности (а, б, д); профили плотности в сечении $y = y_0$ (в, е); Soroban-сетка (г). На (в, е) точками показано решение, полученное на сетках 200×200 , символами + — решения на сетках 400×400 и на Soroban-сетке. Жирные круговые линии радиусом $r/x_0 = 0.2$ на (а, б, д) — начальная граница газовой полости.

На рис. 4 представлены результаты расчетов данной задачи в момент $t = 0.23$ с на стационарных равномерных разнесенных сетках (а-в) и на адаптивной Soroban-сетке (г-е). Использовались равномерные сетки из 200×200 узлов с $\Delta x = \Delta y = 15$ м и из 400×400 узлов с $\Delta x = \Delta y = 15/2$ м, Soroban-сетка с $\Delta x_{\min} = 15/2$ м, $\Delta x_{\max} = 15 \cdot 8$ м ($\alpha = 0.7, \beta = 1.3, q = 1$). Точки и символы + в профилях плотности соответствуют узлам сеток. Расчеты проводились с числом Куранта 0.4. Шаг по времени составлял примерно 10^{-3} с на сетке 200×200 и примерно $5 \cdot 10^{-4}$ с на сетке 400×400 и Soroban-сетке. Коэффициент искусственной вязкости в газе 0.6. При использовании Soroban-сетки начальное распределение параметров в расчетной области задавалось на равномерной сетке из 400×400 узлов. Изолинии плотности на рис. 4д получены интерполяцией на равномерную сетку 400×400 . По сравнению с численным решением, полученным на равномерной сетке 200×200 , решение, полученное на равномерной сетке 400×400 , можно считать удовлетворительным. В нем уже довольно четко выделяются ударная волна в газе и контактный разрыв (рис. 4в). Вместе с тем, цилиндрическая симметрия задачи остается заметно нарушенной, особенно в окрестности контактной границы (на рис. 4а, б, д это сгущение изолиний плотности). При использовании Soroban-сетки численное решение получается близким к решению, рассчитанному с применением равномерной сетки из 400×400 узлов, но цилиндрическая симметрия в окрестности контактной границы сохраняется заметно лучше. Число узлов Soroban-сетки не превышает 250×250 на протяжении всего расчета (рис. 5) за счет сильного разрежения сетки в областях, где решение изменяется мало.

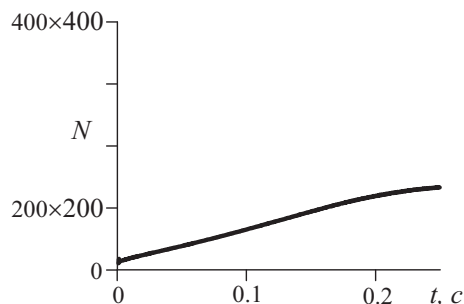


Рис. 5: Изменение количества узлов Soroban-сетки в расчетах задачи о сжатии цилиндрической газовой полости в жидкости.

4. Заключение.

Приведены основные положения методики расчета волн в сжимаемых средах при наличии контактных границ типа газ — жидкость. Методика базируется на модифицированном методе CIP-CUP на динамически-адаптивных Soroban-сетках. Эффективность реализованной методики продемонстрирована на задачах о плоском и цилиндрическом разрыве на границе газ — жидкость. По сравнению с начальной версией метода CIP-CUP на стационарной разнесенной равномерной сетке новая методика позволяет при использовании существенно меньшего числа узлов получить более близкое к точному решение.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Yabe T., Wang P.Y.** Unified numerical procedure for compressible and incompressible fluid// J. Phys. Soc. Japan. — 1991. — V. 60, No 7. — P. 2105–2108.
2. **Аганин А.А., Гусева Т.С.** Численное моделирование контактного взаимодействия сжимаемых сред на эйлеровых сетках// Ученые записки Казанского университета. Серия физико-математические науки. — 2012. — Т. 154, Кн. 4. — С. 74–99.
3. **Аганин А.А., Гусева Т.С.** Расчет контактного взаимодействия сжимаемых сред без явного выделения межфазных границ// Вестник Башкирского Университета. — 2013. — Т. 18, № 3. — С. 646–661.
4. **Takizawa K., Yabe T., Tsugawa Y., Tezduyar T.E., Mizoe H.** Computation of free-surface flows and fluid-object interactions with the CIP method based on adaptive meshless Soroban grids// Comput. Mech. — 2007. — V. 40, No 1. — P. 167–183.
5. **Yabe T., Xiao F., Utsumi T.** The constrained interpolation profile method for multiphase analysis // J. Comput. Phys. — 2001. — V. 169, № 2. — P. 556–593.
6. **Аганин А.А., Гусева Т.С.** Методика расчета волн в жидкости и газе методом CIP-CUP с применением динамически-адаптивных Soroban-сеток// Вестник Башкирского Университета. — 2014. — Т. 19, № 2. — С. 368–380.

REFERENCES

1. **Yabe T., Wang P.Y.** Unified numerical procedure for compressible and incompressible fluid// J. Phys. Soc. Japan. — 1991. — V. 60, № 7. — P. 2105–2108.
2. **Aganin A.A., Guseva T.S.** Numerical simulation of contact interaction of compressible fluids on the Eulerian grids [Chislennoye modelirovaniye kontaktnogo vzaimodeystviya szhimaemykh sred na

- eylerovykh setkakh] // Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki. — 2012. — V. 154, № 4. — P. 74–99 (in Russian).
3. **Aganin A.A., Guseva T.S.** Computation of contact interaction of compressible fluids without explicit separation of contact boundaries [Raschet kontaktnogo vzaimodeystviya szhimaemykh sred bez yavnogo vydeleniya mezhfaznykh granits] // Vestnik Bashkirskogo Universiteta. — 2013. — V. 18, № 3. — P. 646–661 (in Russian).
 4. **Takizawa K., Yabe T., Tsugawa Y., Tezduyar T.E., Mizoe H.** Computation of free-surface flows and fluid-object interactions with the CIP method based on adaptive meshless Soroban grids // Comput. Mech. — 2007. — V. 40, № 1. — P. 167–183.
 5. **Yabe T., Xiao F., Utsumi T.** The constrained interpolation profile method for multiphase analysis // J. Comput. Phys. — 2001. — V. 169, № 2. — P. 556–593.
 6. **Aganin A.A., Guseva T.S.** A technique of computation of waves in gas and liquid based on the CIP-CUP method on dynamically adaptive Soroban grids [Metodika rascheta voln v zhidkosti i gaze metodom CIP-CUP s primeneniym dinamicheski-adaptivnykh Soroban-setok] // Vestnik Bashkirskogo Universiteta. — 2014. — V. 19, № 2. — P. 368–380 (in Russian).